Exercice 1. 1. Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré possédant deux racines réelles x_1 et x_2 (pas nécessairement distinctes).

(a) En utilisant l'expression factorisée de P et en la développant on a $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2$. Par identification des coefficients de P on a $b = -a(x_1 + x_2)$ et $c = ax_1x_2$. Donc $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ et $x_1x_2 = \dfrac{c}{a}$

(b) Réciproquement, soient x_1 et x_2 deux nombres réels. Montrons que x_1 et x_2 sont les racines du polynôme $P(x) = x^2 - sx + p$, où $s = x_1 + x_2$ et $p = x_1x_2$.
On a $\Delta = s^2 - 4p = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = (x_1 - x_2)^2$.
Donc les racines de P sont $\dfrac{x_1 + x_2 + x_1 - x_2}{2} = x_1$ et $\dfrac{x_1 + x_2 - (x_1 - x_2)}{2} = x_2$.

2. On considère l'équation $2x^2 - 5x + 3 = 0$.

(a) $x_1 = 1$ est une racine évidente de P.

(b) On a, d'après 1), $x_1 + x_2 = \dfrac{5}{2}$ et $x_1x_2 = \dfrac{3}{2}$

(c) En utilisant l'une des égalité ci-dessus, par exemple la deuxième, on obtient $x_2 = \dfrac{3}{2}$.

3. Montrons qu'ils existent deux nombres dont la somme est 6 et le produit est 1. Les deux nombre existent si, et seulement si, le polynôme $P(X) = X^2 - 6X + 1$ admet deux racines (pas nécessairement distinctes), c'est à dire $\Delta \geqslant 0$. Ceci est vrai car $\Delta = 32$.

4. Les nombres existent si le polynôme $X^2 - X + 1$ a des racines réelles ce qui n'est pas le cas car son discriminant est négatif égale à -3.

Exercice 2. 1. Dans toute la suite,on notera $Q(X)$ et $R(X)$ respectivement le quotient et le reste des divisions euclidiennes.

(a) $Q(X) = X^2 - 3X + 6$ et $R(X) = -8$.

(b) $Q(X) = X^2 - 4X + 4$ et $R(X) = 24X - 30$.

(c) $Q(X) = 2X^2 - X + 2$ et $R(X) = 2X - 3$.

2. (a) En effectuant la division euclidienne de $P(X)$ par $(X - a)$ on obtient $P(X) = Q(X)(X - a) + K$ avec $Q(X) \in \mathbb{R}[X]$ et $K \in \mathbb{R}$. En évaluant P en a on obtient $K = P(a)$. $R(X) = P(a)$.

(b) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a \neq b$ et $P \in \mathbb{R}[X]$. Exprimons le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)(X - b)$ en fonction de $P(a)$ et $P(b)$. En effectuant la division euclidienne de $P(X)$ par $(X - a)(X - b)$ on obtient $P(X) = Q(X)(X - a)(X - b) + \alpha X + \beta$ avec $Q(X) \in \mathbb{R}[X]$ et $(\alpha,\ \beta) \in \mathbb{R}^2$. En évaluant P en a et en b, on obtient $a\alpha + \beta = P(a)$ et $b\alpha + \beta = P(b)$.
Donc $R(X) = \alpha X + \beta$ avec $\alpha = \dfrac{P(b) - P(a)}{b - a}$ et $\beta = \dfrac{bP(a) - aP(b)}{b - a}$.

(c) Soient $a \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$.
Exprimons le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)^2$ en fonction de $P(a)$ et $P'(a)$. En effectuant la division euclidienne de $P(X)$ par $(X - a)^2$ on obtient $P(X) = Q(X)(X - a)^2 + \alpha X + \beta$ avec $Q(X) \in \mathbb{R}[X]$ et $(\alpha,\ \beta) \in \mathbb{R}^2$. On a $P'(X) = 2(x - a)Q(X) + (X - a)^2Q(X)' + \alpha$. En évaluant P et P' en a, on obtient $a\alpha + \beta = P(a)$ et $\alpha = P'(a)$.
Donc $R(X) = \alpha X + \beta$ avec $\alpha = P'(a)$ et $\beta = P(a) - aP'(a)$.

(d) Pour 1)a) on utilise 2)a) pour $a = -1$ on obtient $R(X) = P(-1) = -8$.
Pour 1)b) on utilise 2)c) pour $a = 2$, on obtient $R(X) = 24X - 30$.
Pour 1)c) on utilise 2)b) pour $a = -1$ et $b = 1$, on obtient $R(X) = 2X - 3$.

Exercice 3. 1. Factorisons le polynôme $P(X) = X^3 - 2X^2 - 5X + 6$. Comme 1 est une racine évidente de P, $P(X)$ se factorise par $X - 1$. En effectuant la division euclidienne de $P(X)$ par $X - 1$ on obtient $P(X) = (X - 1)(X^2 - X - 6)$. Or $X^2 - X - 6 = (X + 2)(X - 3)$ (avec le discriminant),donc $P(X) = (X - 1)(X + 2)(X - 3)$. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}$ est définie sur $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{-2,\ 1,\ 3\}$.

2. La fonction $f : x \mapsto \ln(x^3 - 2x^2 - 5x + 6)$ est définie sur $\mathcal{D}_f =]-2\,;1[\cup]3\,;+\infty[$.

Exercice 4. On a $4e^{2x} + 6e^x - 4 - 2e^{-x} = e^{-x}P(\mathrm{e}^x)$. Donc $4e^{2x} + 6e^x - 4 - 2e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^x(4e^{2x} + 6e^x - 4 - 2e^{-x}) = 0$. C'est à dire , on ne change pas les solutions en multipliant chaque coté de l'égalité par e^x. Ce qui donne $4e^{3x} + 6e^{2x} - 4\mathrm{e}^x - 2 = 0$.
D'autre part en osant $X = \mathrm{e}^x$, l'équation devient $P(X) = 0$ avec $P(X) = 4X^3 + 6X^2 - 4X - 2$.

P admet comme racine évidente -1, il est factorisable par $X+1$. En effectuant la division euclidienne de P par $X+1$, on trouve $P(X)=(X+1)(-4X^2-2X-2)$. Or $-4X^2-2X-2$ a un discriminant strictement négatif, il n'a pas de racines.
Ainsi $4e^{2x}6e^x-4-2e^{-x}=0 \Leftrightarrow P(e^x)=0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x=-1$ ceci est impossible. Donc $S=\emptyset$.

Exercice 5. Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ tel que $P(X+1)=P(X)$. Supposons de plus que P a au moins une racine $\alpha\in\mathbb{R}$.

1. Montrons par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $P(\alpha+n)=0$.
   On a $P(\alpha+0)=P(\alpha)=0$
   Supposons que pour un entier $n\in\mathbb{N},\ P(\alpha+n)=0$. Montrons que $P(\alpha+n+1)=0$.
   En effet,
   $$\begin{aligned}P(\alpha+n+1)&=P(\alpha+n) \textit{ car } P(X+1)=P(X)\\&=0 \textit{ d'après l'hypothèse de récurrence}\end{aligned}$$
   Donc pour tout $n\in\mathbb{N},\ P(\alpha+n)=0$.
2. D'après 1) P admet une infinité de racines, donc $P=0$.

Exercice 6. Soit $P(X)=aX^2+bX+c$ avec $(a,\ b,\ c)\in\mathbb{R}^3$. On a
$$\begin{aligned}P(X)-P(-X)&=aX^2+bX+c-(a(-X)^2+b(-X)+c)\\&=2bX\end{aligned}$$

1. Si $P(X)$ est pair $P(X)-P(-X)=0$. Or, d'après ce qui précède $P(X)-P(-X)=2bX$.
   Donc $P(X)-P(-X)=0\Leftrightarrow b=0$ (identification des coefficients). Donc les polynômes pairs de $\mathbb{R}_2[X]$ sont ceux qui s'écrivent sous la forme $P(X)=aX^2+c$ où $(a,\ c)\in\mathbb{R}^2$.
   On a procédé par identification entre $P(X)-P(-X)$ et le polynôme nul.
2. Si P est impair $P(X)-P(-X)=2P(X)=2aX^2+2bX+2c$.Or, d'après ce qui précède $P(X)-P(-X)=2bX$.
   Donc $P(X)-P(-X)=2aX^2+2bX+2c\Leftrightarrow a=c=0$ (identification des coefficients).
   Donc les polynômes impairs de $\mathbb{R}_2[X]$ sont ceux qui s'écrivent sous la forme $P(X)=bX$ où $b\in\mathbb{R}$.
3. **Cas général :** Soient $P\in\mathbb{R}[X]$. P s'écrit sous la forme $P(X)=\sum_{i=0}^{n}a_iX^i$ où $n\in\mathbb{N}$. On a
   $$\begin{aligned}P(X)-P(-X)&=\sum_{i=0}^{n}a_iX^i-\sum_{i=0}^{n}a_i(-X)^i\\&=\sum_{i=0}^{n}a_i(X^i-(-X)^i)\\&=\sum_{i\in I}2a_iX^i\end{aligned}$$
   où I est l'ensemble des indices impairs.
   (a) Si P est pair alors $P(X)-P(-X)=0$. Or $P(X)-P(-X)=\sum_{i\in I}2a_iX^i$.
   Donc $P(X)-P(-X)=0\Leftrightarrow \forall i\in I, a_i=0$ (identification des coefficients). Donc les polynômes pairs de $\mathbb{R}[X]$ sont ceux qui s'écrivent sous la forme $P(X)=\sum_{k=0}^{m}a_{2k}X^{2k}$ où $m\in\mathbb{N}$.
   (b) Si P est impair alors $P(X)-P(-X)=2P(X)=\sum_{i=0}^{n}2a_iX^i$. Or $P(X)-P(-X)=\sum_{i\in I}2a_iX^i$.
   Donc $P(X)-P(-X)=2P(X)\Leftrightarrow \forall i\in [\![0\,;n]\!]\backslash I,\ a_i=0$ (identification des coefficients). Donc les polynômes impairs de $\mathbb{R}[X]$ sont ceux qui s'écrivent sous la forme $P(X)=\sum_{k=0}^{m}a_{2k+1}X^{2k+1}$ où $m\in\mathbb{N}$.

Exercice 7. 1. Soit P un polynômes P de degré 2 tels que $P(1)=0$ et $P'(1)=0$.
On a $P(X)=aX^2+bX+c$ et $P'(X)=2aX+b$ avec $a\neq 0$. Comme $P(1)=P'(1)=0$, on a : $\begin{cases}a+b+c=0\\2a+b=0\end{cases}$.

Donc $b = -2a$ et $c = a$ (à vérifier par le lecteur) et alors P est de la forme : $P(X) = a(X-1)^2$ avec $a \in \mathbb{R}^*$.
Réciproquement Si $P(X) = a(X-1)^2$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ alors $P'(X) = 2(X-1)$ et on a $P(1) = P'(1) = 0$.

2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré supérieur ou égal à 2 et $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X) = (X-1)^2Q(X)$. Montrons que $P(1) = 0$ et $P'(1) = 0$. En effet, on a $P'(X) = 2(X-1)Q(X) + (X-1)^2Q'(X)$. En évaluant P et P' en 1, on obtient $P(1) = P'(1) = 0$.
3. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré supérieur ou égal à 2 tel que $P(1) = 0$ et $P'(1) = 0$. Montrons qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X) = (X-1)^2Q(X)$. En effet, puisque $P(1) = 0$, il existe $H \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X) = (X-1)H(X)$. Montrons que $H(X)$ se factorise lui même par $X-1$. Pour cela il suffit de montrer que $H(1) = 0$.
On a $P'(X) = H(X) + (X-1)H'(X)$ et $P'(1) = 0$, d'où $H(1) = 0$. Donc il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $H(X) = (X-1)Q(X)$, et par conséquent $P(X) = (X-1)H(X) = (X-1)(X-1)Q(X) = (X-1)^2Q(X)$.
4. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré supérieur ou égal à 2 et $n \in \mathbb{N}^*$. On note P'' la dérivée dérivée seconde de P. Supposons que $P(1) = P'(1) = P''(1) = 0$. Montrons qu'il existe $H \in \mathbb{R}[X],\ P(X) = (X-1)^3H(X)$.
En effet ; comme $P(1) = P'(1) = 0$, il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X) = (X-1)^2Q(X)$. Montrons que $Q(1) = 0$.
On a $P''(X) = (P'(X))' = (2(X-1)Q(X) + (X-1)^2Q'(X))' = P(X)Q''(X) + 4(X-1)Q'(X) + 2Q(X)$ (à vérifier par le lecteur) ; en particulier $P''(1) = 2Q(1)$. Or $P''(1) = 0$,donc $Q(1) = 0$. Donc il existe $H \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q(X) = (X-1)H(X)$. On a alors $P(X) = (X-1)^2Q(X) = (X-1)^3H(X)$.
Pour les curieux :
Cas général : Soit Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non nul, $a \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{N}^*$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $P^{(k)}$ désigne la dérivée $k^{\text{ième}}$ de P et $P^{(0)} = P$.
On a équivalence entre :
   (a) $\exists Q \in \mathbb{R}[X],\ P(X) = (X-a)^mQ(X)$.
   (b) $P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(m-1)}(a) = 0$.

   La preuve utilise la formule de Taylor (Hors programme) qu'on peut démontrer avec récurrence :
   « Si $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ et $n = \deg\,(P)$ alors $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{P^k(a)}{k!}(X-a)^k$ »

Exercice 8. On considère la matrice
$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

1. On a $A^2 = \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$. On vérifie facilement que $A^2 - 3A + 2I = 0$. On a alors $A(A-3I) = -2I$, soit $A\left(\dfrac{3I-A}{2}\right) = I$. Donc A est inversible et $A^{-1} = \dfrac{3I-A}{2}$. Après calcul on obtient
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$
2. Pour $n \geqslant 2$, déterminons le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$.
On a $X^n = (X^2 - 3X + 2)Q(X) + R(X)$ avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $R(X) = aX + b$ où $(a,\ b) \in \mathbb{R}^2$.
Comme 1 et 2 sont les deux racines de $X^2 - 3X + 2$, on a $1^n = R(1)$ et $2^n = R(2)$. D'où le système :
$$\begin{cases} a + b = 1 \\ 2a + b = 2^n \end{cases} .$$
Cela donne $a = 2^n - 1$ et $b = 2 - 2^n$. Donc $R(X) = (2^n - 1)X + 2 - 2^n$.
3. On a d'après b), $A^n = (A^2 - 3A + 2I)Q(A) + R(A) = R(A) = (2^n - 1)A + (2 - 2^n)I$. Finalement
$$A^n = \begin{pmatrix} 3 - 2^{n+1} & -2^{n+1} + 2 \\ 3 \times 2^n - 3 & 3 \times 2^n - 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 9. 1. $Q^2 = XP^2$ d'inconnues $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ Si $(P,\ Q)$ est un couple solution de polynômes non nuls alors $Q^2 = XP^2$ donne $2\deg\,Q = 1 + 2\deg\,P$ avec $\deg\,P, \deg\,Q \in N$ ce qui est impossible, un entier pair ne peut ête égal à un entier impair. Il reste le cas où l'un des polynômes P ou Q est nul et l'autre, alors, l'est aussi. Inversement, le couple nul est effectivement solution.

2. Parmi les polynômes constants, seuls le polynôme nul est solution. Si deg $P = n \geqslant 1$ alors deg $P(X^2) = 2n$ et deg $(X^2+1)P(X) = n+2$. Donc pour vérifier l'équation, il est nécessaire que $2n = n+2$, soit $n = 2$. On peut alors écrire P sous la forme $aX^2 + bX + c$.
   L'équation devient $aX^4 + bX^2 + c = aX^4 + bX^3 + (a+c)X^2 + bX + c$. Par identification des coefficients on obtient $b = 0$ et $c = -a$ c'est à dire $P(X) = aX^2 - a$.
   Conclusion, les polynômes solutions sont les $a(X^2-1)$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 10. En utilisant la relation de récurrence on trouve $P_2(X) = 2X^2 - 1$ et $P_3(X) = 4X^3 - 3X$.
Il semblerait que le polynôme P_n soit de degré n. Ce qui va nous servir de conjecture. Démontrons la par un raisonnement par récurrence :
Initialisation :
P_0 est bien de degré 0 et P_1 est de degré 1.
Hérédité :
Supposons que pour un entier n fixé, P_n soit de degré n et P_{n+1} soit de degré $n+1$.
On a $P_{n+2}(X) = 2XP_{n+1}(X) - P_n(X)$. $2XP_{n+1}(X)$ est de degré $n+2$ et $P_n(X)$ est de degré n. On en déduit que le degré de P_{n+2} est $n+2$.

Exercice 11. Le reste de la division cherché s'écrit $aX + b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Si on note Q le quotient.

$$(X-2)^m + (X-1)^n - 1 = Q(X-1)(X-2) + aX + b$$

En évaluant en 1 et 2 on trouve que $a = 1 + (-1)^{m+1}$ et $b = -2a$.
Ainsi $R = \left(1 + (-1)^{m+1}\right)(X-2)$
On peut alors écrire :

$$\begin{aligned}
(X-1)(X-2)Q &= (X-2)^m + (X-1)^n - 1 - \left(1 + (-1)^{m+1}\right)(X-2) \\
&= \left((X-2)^{m-1} - 1 + (-1)^m\right)(X-2) + \left((X-1)^n - 1\right) \\
&= \left((X-2)^{m-1} - 1 + (-1)^m\right)(X-2) + (X-2)\sum_{k=0}^{n-1}(X-1)^k \\
&= \left((X-2)^{m-1} + (-1)^m\right)(X-2) + (X-2)\sum_{k=1}^{n-1}(X-1)^k \\
&= \left((X-2)^{m-1} - (-1)^{m-1}\right)(X-2) + (X-2)\sum_{k=1}^{n-1}(X-1)^k \\
&= (X-1)\left(\sum_{j=0}^{m-2}(X-2)^j(-1)^{m-2-j}\right)(X-2) + (X-2)(X-1)\sum_{k=0}^{n-2}(X-1)^k
\end{aligned}$$

On en déduit que $Q = \displaystyle\sum_{j=0}^{m-2}(X-2)^j(-1)^{m-2-j} + \sum_{k=0}^{n-2}(X-1)^k$